# Die feldtheoretische Formulierung der nichtrelativistischen Mehrkanalstreutheorie

Von W. WEIDLICH

Aus dem Institut für Theoretische und Angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. **18 a**, 1266—1275 [1963]; eingegangen am 4. Oktober 1963)

Methods for the explicit construction of asymptotic fields in terms of the interpolating field in a nonrelativistic theory are derived in both cases of one sort resp. many sorts of asymptotic particles. A simple nontrivial multichannelcase is discussed explicitly.

Seitdem in den letzten Jahren mehrere neue Elementarteilchen entdeckt und experimentell untersucht worden sind, wird es immer mehr zur fundamentalen Aufgabe der Feldtheorie, nicht nur durch Wechselwirkungsansätze zwischen den verschiedenen Feldern oder durch funktionentheoretische Methoden für die Streumatrixelemente Aussagen über die Wechselwirkung zu gewinnen, sondern möglichst die Existenz der Teilchen und ihre Wechselwirkung zugleich aus einer einheitlichen Grundlage abzuleiten. In der relativistischen Feldtheorie gibt es dafür Versuche in verschiedener Richtung. Einmal wird von HEISENBERG [1, 2] und anderen Autoren auf der Grundlage einer konkreten nichtlinearen Spinorgleichung für ein Fundamentalfeld versucht, direkt z. B. Masseneigenwerte für die mit dem Fundamentalfeld zu beschreibenden Elementarteilchen zu berechnen. Andererseits kann die axiomatische Feldtheorie [3] so erweitert werden, daß mehrere ein- bzw. auslaufende Teilchensorten und die dazugehörigen asymptotischen Felder vorhanden sind [4, 5]. Diese sollen alle aus nur einem interpolierenden Feld hervorgehen, welches dann bestimmte Bedingungen zu erfüllen hat. Da es jedoch noch keine, in jeder Hinsicht befriedigende Konkretisierung dieses axiomatischen Rahmens gibt, ist es interessant, dieselbe Problematik an einem nichtrelativistischen System zu untersuchen. Wir wollen dabei vor dem Übergang zur Feldtheorie die Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichungen in allen $N$-Teilchenkonfigurationsräumen als bekannt voraussetzen. Wenn in den $N$-Teilchenräumen gebundene Zustände auftreten, gibt es mehrere ein- und auslaufende Teilchensorten („einfache" und „zusammengesetzte"). Dementsprechend gibt es neben dem kanonischen „interpolierenden" Feld $\psi(\mathfrak{r};t)$ mehrere asymptotische kanonische Felder

$$A_{\pm}(\mathfrak{r};t); \quad B_{\pm}(\mathfrak{r};t), \ldots$$

für die verschiedenen Teilchensorten. Der HILBERT-Raum des Systems kann einmal als FOCK-Raum $\mathfrak{H}_{\psi}$ des $\psi(\mathfrak{r};t)$-Feldes aufgebaut werden, andererseits als Produktraum $\mathfrak{H}_{A+} \times \mathfrak{H}_{B+} \times \ldots$ der FOCK-Räume der verschiedenen asymptotischen Felder. Schon daraus ergibt sich, daß $A_{\pm}(\mathfrak{r};t)$ oder $B_{\pm}(\mathfrak{r};t)$ nicht mit $\psi(\mathfrak{r};t)$ unitäräquivalent sein können, obwohl alle Felder den kanonischen Vertauschungsrelationen genügen. Dies hat als erster schon EKSTEIN [6] bemerkt, der auch in allgemeinster Weise den Zusammenhang zwischen $\psi(\mathfrak{r};t)$ und $A_{\pm}(\mathfrak{r};t)$, $B_{\pm}(\mathfrak{r};t)$ diskutierte. Der feldtheoretische, nichtrelativistische in-out-Formalismus ist in letzter Zeit von REDMOND und URETZKY [7] sowie von SCHWEBER und SUDARSHAN [8] untersucht worden. Letztere Autoren definieren einen asymptotischen $N$-Teilchenoperator, der in verschiedene Anteile entsprechend den Fragmentkonfigurationen im $N$-Teilchenraum zerfällt, durch

$$\psi_{\pm}^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N;t) = \lim_{t' \to \pm\infty} \int d\mathfrak{r}_1' \ldots d\mathfrak{r}_N' (0 \,|\, \psi(\mathfrak{r}_1 t) \ldots \psi(\mathfrak{r}_N t)\, \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}_1' t') \ldots \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}_N' t') \,|\, 0)\, \psi(\mathfrak{r}_1' t') \ldots \psi(\mathfrak{r}_N' t').$$

Die asymptotischen Operatoren sind also durch das interpolierende Feld $\psi(\mathfrak{r};t')$ für $t' \to \pm\infty$ ausgedrückt. Ergänzend dazu ist es wünschenswert, die asymptotischen Felder direkt explizit in $\psi(\mathfrak{r};t)$ für endliches $t$,

[1] H. P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMASAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 441 [1959].
[2] H. P. DÜRR u. W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. **16 a**, 726 [1961].
[3] H. LEHMANN, K. SYMANZIK u. W. ZIMMERMANN, Nuovo Cim. **1**, 205 [1955].
[4] W. ZIMMERMANN, Nuovo Cim. **10**, 597 [1958].
[5] R. HAAG, Phys. Rev. **112**, 669 [1958].
[6] H. EKSTEIN, Nuovo Cim. **4**, 1017 [1956].
[7] P. J. REDMOND u. J. L. URETZKI, Ann. Phys., N. Y. **9**, 106 [1960].
[8] S. S. SCHWEBER u. E. C. G. SUDARSHAN, Ann. Phys. N. Y. **19**, 351 [1962].

z. B. $t=0$, auszudrücken. Die allgemeine Methode dazu und ihre Durchführung im einfachsten nichttrivialen Mehrkanalfall geben wir in Abschnitt 2 an. Zum Vergleich diskutieren wir in Abschnitt 1 den einfacheren Fall ohne gebundene Zustände. In diesem Fall existieren unitäre MÖLLER-Operatoren. Wir geben ihre feldtheoretische Form an.

## 1. Das einfache Streusystem (ohne gebundene Zustände)

Betrachten wir zunächst die einzelnen $N$-Teilchenkonfigurationsräume. Nach HAAG und BRENIG [9] gehört in diesem Falle zu jeder Lösung $\psi_+^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)$ (symmetrisch in allen $\mathfrak{r}_j$) der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_+^{(N)} = H^{(N)}\psi_+^{(N)} \qquad (1,1) \qquad \text{mit} \qquad H^{(N)} = \sum_{j=1}^{N}\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta_j + \frac{1}{2}g\sum_{i\neq j}^{N}V(|\mathfrak{r}_i-\mathfrak{r}_j|) \qquad (1,2)$$

ein-eindeutig eine Lösung $\varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)$ der freien SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{(N)} = H_0^{(N)}\varphi^{(N)} \qquad \text{mit} \qquad H_0^{(N)} = \sum_{j=1}^{N}\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta_j, \qquad (1,3),\ (1,4)$$

so daß
$$\lim_{t\to+\infty}\|\psi_+^{(N)}(t)-\varphi^{(N)}(t)\| = \lim_{t\to+\infty}\left\|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H^{(N)}t\right\}\psi_+^{(N)}(0)-\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_0^{(N)}t\right\}\varphi^{(N)}(0)\right\|$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left\|\psi_+^{(N)}(0)-\exp\left\{\frac{i}{\hbar}H^{(N)}t\right\}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_0^{(N)}t\right\}\varphi^{(N)}(0)\right\| = 0\,. \qquad (1,5)$$

Das heißt, jede Lösung $\psi_+^{(N)}(t)$ der vollen SCHRÖDINGER-Gleichung verhält sich asymptotisch für $t\to+\infty$ wie ein bestimmtes Wellenpaket von $N$ frei auseinanderlaufenden Teilchen. [Dies ist natürlich eine Voraussetzung an das Potential $V(|\mathfrak{r}_i-\mathfrak{r}_j|)$.] Entsprechendes gilt für $t\to-\infty$. Aus (1, 5) folgt, da die $\psi_+^{(N)}(0)$ wie die zugehörigen $\varphi^{(N)}(0)$ jeweils den ganzen $N$-Teilchen-HILBERT-Raum $\mathfrak{H}^{(N)}$ durchlaufen, daß

$$\Omega_\pm^{(N)} = \lim_{t\to\pm\infty}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}H^{(N)}t\right\}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_0^{(N)}t\right\} \qquad (1,6)$$

nicht nur isometrisch, sondern unitär in $\mathfrak{H}^{(N)}$ ist.

Es ist dann:
$$\psi_\pm^{(N)}(0) = \Omega_\pm^{(N)}\varphi^{(N)}(0)\,. \qquad (1,6')$$

Die feldtheoretische Formulierung faßt nun sämtliche $N$-Teilchenstreusysteme von $N=0$ bis $\infty$ zusammen. Der HAMILTON-Operator lautet jetzt:

$$H = H_0 + g H_1 = \int\psi^\dagger(\mathfrak{r})\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\right)\psi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r} + \tfrac{1}{2}g\int\psi^\dagger(\mathfrak{r})\,\psi^\dagger(\mathfrak{r}')\,V(|\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'|)\,\psi(\mathfrak{r}')\,\psi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}', \qquad (1,7)$$

wobei $\psi(\mathfrak{r})$ die kanonischen Vertauschungsrelationen eines BOSE-Feldes erfüllt:

$$[\psi(\mathfrak{r}),\psi^\dagger(\mathfrak{r}')] = \delta(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'), \qquad [\psi(\mathfrak{r});\psi(\mathfrak{r}')] = [\psi^\dagger(\mathfrak{r}),\psi^\dagger(\mathfrak{r}')] = 0\,. \qquad (1,8)$$

Der HILBERT-Raum wird in üblicher Weise als FOCK-Raum $\mathfrak{H}_\psi$ von $\psi$ aus einem Vakuum $\Phi_0$; $(\psi(\mathfrak{r})\,\Phi_0=0)$ durch Anwenden der $\psi^\dagger(\mathfrak{r})$ aufgebaut. Im SCHRÖDINGER-Bild genügt dann z. B. der $N$-Teilchenzustand:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\int\psi_+^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)\,\psi^\dagger(\mathfrak{r}_1)\ldots\psi^\dagger(\mathfrak{r}_N)\,d\mathfrak{r}_1\ldots d\mathfrak{r}_N\,\Phi_0 \qquad (1,9)$$

der SCHRÖDINGER-Gleichung
$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t) = H\,\Phi(t)\,, \qquad (1,10)$$

wenn die Amplitude $\psi_+^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)$ der SCHRÖDINGER-Gleichung (1, 1) genügt.

Beim Übergang zum HEISENBERG-Bild führen wir zeitabhängige Operatoren ein:

$$\psi(\mathfrak{r},t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}Ht\right\}\psi(\mathfrak{r})\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}Ht\right\}. \qquad (1,11)$$

[9] W. BRENIG u. R. HAAG, Fortschr. Phys. 7, 183 [1959].

Auf Grund von (1, 1) und (1, 11) erkennt man sofort, daß

$$\Psi = \Phi(0) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \psi_{+}^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}_1 t) \ldots \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}_N t)\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N\, \Phi_0 \tag{1,12}$$

ein zeitunabhängiger Heisenberg-Zustand ist. Er beschreibt ein System von $N$-Teilchen, deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit an $\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N$ zur Zeit $t$ durch $|\psi_{+}^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)|^2$ gegeben ist. Zum Beispiel hat der Heisenberg-Bildoperator

$$\mathcal{N}(V; t) = \int_V \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}; t)\, \psi(\mathfrak{r}; t)\, d\mathfrak{r} \tag{1,13}$$

für die Anzahl der Teilchen im Volumen $V$ zur Zeit $t$ im Zustand $\Psi$ den Erwartungswert:

$$(\Psi, \mathcal{N}(V; t)\, \Psi) = N \int_V d\mathfrak{r}_1 \int_\infty d\mathfrak{r}_2 \ldots d\mathfrak{r}_N\, |\psi_{+}^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)|^2. \tag{1,14}$$

Wir wollen nun zusätzlich Operatoren

$$\psi_{\pm}(\mathfrak{r}; t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} H t\right\} \psi_{\pm}(\mathfrak{r}) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H t\right\} \tag{1,15}$$

einführen, die folgendermaßen definiert sind:

**1.** $\psi_{\pm}(\mathfrak{r})$ genüge wie $\psi(\mathfrak{r})$ den Vertauschungsrelationen (1, 8).

**2.** $\mathfrak{H}_{\psi}$ ist auch Fock-Raum von $\psi_{\pm}(\mathfrak{r})$ mit $\psi_{\pm}(\mathfrak{r})\, \Phi_0 = 0$.

Da $\psi$ und $\psi_{\pm}$ in $\mathfrak{H}_{\psi}$ äquivalent dargestellt sind, gibt es eine unitäre Transformation $\Omega_{\pm}$, die beide verbindet:

$$\psi_{\pm}(\mathfrak{r}) = \Omega_{\pm}\, \psi(\mathfrak{r})\, \Omega_{\pm}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \psi_{\pm}(\mathfrak{r}; t) = U_{\pm}(t)\, \psi(\mathfrak{r}; t)\, U_{\pm}^{-1}(t)\,; \quad U_{\pm}(t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar} H t\right\} \Omega_{\pm} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H t\right\} \tag{1,16}$$

**3.** Für alle $N$ soll gelten:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \psi_{\pm}^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}_1) \ldots \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}_N)\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N\, \Phi_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}_1) \ldots \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}_N)\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N\, \Phi_0 \end{aligned} \tag{1,17}$$

oder gleichbedeutend:

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \psi_{\pm}^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}_1; t) \ldots \psi^{\dagger}(\mathfrak{r}_N; t)\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N\, \Phi_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}_1; t) \ldots \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}_N; t)\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N\, \Phi_0\,, \end{aligned} \tag{1,17'}$$

wobei $\psi_{\pm}^{(N)}$ und $\varphi^{(N)}$ nach (1, 6') unitär in $\mathfrak{H}^{(N)}$ zusammenhängen.

Die Forderung (1, 17) ist erfüllbar, weil gilt:

$$\begin{aligned} (\Psi_1, \Psi_2) &= \int \psi_{\pm 1}^{(N)*}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, \psi_{\pm 2}^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N \\ &= \int \varphi_1^{(N)*}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, \varphi_2^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N\,. \end{aligned}$$

Aus der Tatsache, daß $\Psi_{\pm}$ für alle $N$ zeitunabhängig ist und $\varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)$ der freien Schrödinger-Gleichung (1, 3) genügt, läßt sich schließen, daß $\psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}; t)$ der freien Schrödinger-Gleichung

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}; t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}; t) \tag{1,18}$$

genügen muß.

Da andererseits nach (1, 15)

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}; t) = [H, \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}; t)]$$

sein soll, bedeutet dies, daß $H$ in den $\psi_{\pm}(\mathfrak{r}; t)$ ausgedrückt, die Form eines freien Hamilton-Operators haben muß:

$$H = \int \psi_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{r}; t) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \Delta\right) \psi_{\pm}(\mathfrak{r}; t)\, d\mathfrak{r}\,. \tag{1,19}$$

Um das asymptotische Verhalten von $\psi(\mathfrak{r};t)$ für $t \to \pm\infty$ zu untersuchen, führen wir neben $\Psi_\pm$ noch ein

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t)\, \psi^\dagger(\mathfrak{r}_1; t) \ldots \psi^\dagger(\mathfrak{r}_N; t)\, \Phi_0 . \tag{1,20}$$

Wegen (1, 5) gilt:

$$\| \Psi(t) - \Psi_\pm \| \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \pm\infty , \tag{1,21}$$

andererseits ist

$$\begin{aligned}\Psi(t) - \Psi_\pm &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \int \varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t) (\psi^\dagger(\mathfrak{r}_1; t) \ldots \psi^\dagger(\mathfrak{r}_N; t) - \psi^\dagger_\pm(\mathfrak{r}_1; t) \ldots \psi^\dagger_\pm(\mathfrak{r}_N; t))\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N\, \Phi_0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} (\psi^\dagger_{\alpha_1}(t) \ldots \psi^\dagger_{\alpha_N}(t) - \psi^\dagger_{\pm\alpha_1} \ldots \psi^\dagger_{\pm\alpha_N})\, \Phi_0 ,\end{aligned} \tag{1,22}$$

wenn wir speziell

$$\varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t) = \prod_{j=1}^{N} \varphi^{(1)}_{\alpha_j}(\mathfrak{r}_j; t)$$

als Produkt von freien Einteilchenzuständen wählen und

$$\psi^\dagger_\alpha(t) = \int \psi^{(1)}_\alpha(\mathfrak{r}; t)\, \psi^\dagger(\mathfrak{r}; t)\, d\mathfrak{r} \tag{1,23}$$

setzen. Aus (1, 21) und (1, 22) folgt die Konvergenzbeziehung:

$$\psi^\dagger_\alpha(t) \Rightarrow \psi^\dagger_{\pm\alpha} \quad \text{für} \quad t \to \pm\infty \tag{1,24}$$

im Sinne der starken Operatorkonvergenz.

B e w e i s : Zu zeigen ist

$$\| (\psi^\dagger_\alpha(t) - \psi^\dagger_{\pm\alpha})\, \psi^\dagger_{\pm\alpha_1} \ldots \psi^\dagger_{\pm\alpha_N} \Phi_0 \| \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \pm\infty$$

für alle $N = 0, 1, \ldots \infty$ und alle $\alpha_j$, denn die $\psi^\dagger_{\pm\alpha_1} \ldots \psi^\dagger_{\pm\alpha_N} \Phi_0$ bauen ganz $\mathfrak{H}$ auf. Nun ist mit Hilfe von (1, 17')

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \| (\psi^\dagger_\alpha(t) - \psi^\dagger_{\pm\alpha})\, \psi^\dagger_{\pm\alpha_1} \ldots \psi^\dagger_{\pm\alpha_N} \Phi_0 \| \\ &\quad \leqq \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \| (\psi^\dagger_\alpha(t)\, \psi^\dagger_{\alpha_1}(t) \ldots \psi^\dagger_{\alpha_N}(t) - \psi^\dagger_{\pm\alpha} \psi^\dagger_{\pm\alpha_1} \ldots \psi^\dagger_{\pm\alpha_N})\, \Phi_0 \| \\ &\quad\quad + \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} \| \psi^\dagger_\alpha(t)\, (\psi^\dagger_{\pm\alpha_1} \ldots \psi^\dagger_{\pm\alpha_N} - \psi^\dagger_{\alpha_1}(t) \ldots \psi^\dagger_{\alpha_N}(t))\, \Phi_0 \| \\ &\quad = \int | \varphi^{(1)}_\alpha(\mathfrak{r}; t) \prod_{j=1}^{N} \varphi^{(1)}_{\alpha_j}(\mathfrak{r}_j; t) - \psi^{(N+1)}_{\pm\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_N}(\mathfrak{r}\, \mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t) |^2\, d\mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N \\ &\quad\quad + \int | \varphi_\alpha(\mathfrak{r}; t)\, (\psi^{(N)}_{\pm\alpha_1 \ldots \alpha_N}(\mathfrak{r}_1 \ldots \mathfrak{r}_N; t) - \prod_{j=1}^{N} \varphi^{(1)}_{\alpha_j}(\mathfrak{r}_j; t)) |^2\, d\mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}_1 \ldots d\mathfrak{r}_N .\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung wegen (1, 5).

Wir wollen nun noch die in (1, 16) eingeführten feldtheoretischen Möller-Operatoren $\Omega_\pm$ berechnen. Sie können entweder in den $\psi$ oder in $\psi_\pm$ ausgedrückt werden, und zwar gilt:

$$\Omega_+(\psi) = \Omega_+(\psi_+) ; \; \Omega_-(\psi) = \Omega_-(\psi_-) , \tag{1,25}$$

d. h. die funktionale Form von $\Omega_+$ in $\psi$ ist dieselbe wie in $\psi_+$.

B e w e i s :

$$\begin{aligned}\Omega_+(\psi_+) &= \Omega_+(\Omega_+ \psi\, \Omega_+^{-1}) \\ &= \Omega_+\, \Omega_+(\psi)\, \Omega_+^{-1} = \Omega_+(\psi) .\end{aligned}$$

Als Ausgangspunkt für die Bestimmung von $\Omega_\pm$ dient die Tatsache, daß $H$ nach (1, 19) in $\psi_\pm(\mathfrak{r})$ ausgedrückt die freie Form hat, während es in $\psi$ ausgedrückt nach (1, 7) Wechselwirkungsglieder enthält. Um dies anzudeuten, schreiben wir:

$$H(\psi) = H_0(\psi) + g\, H_1(\psi) = H_0(\psi_\pm) . \tag{1,26}$$

Andererseits mit (1, 16):

$$\begin{aligned}H(\psi) &= H(\Omega^\dagger_\pm\, \psi_\pm\, \Omega_\pm) \\ &= \Omega^\dagger_\pm(\psi_\pm)\, H(\psi_\pm)\, \Omega_\pm(\psi_\pm) = H_0(\psi_\pm) .\end{aligned} \tag{1,26'}$$

Man kann nun für $\Omega^\dagger_\pm(\psi_\pm)$ den störungstheoretischen Ansatz machen:

$$\Omega^\dagger_\pm(\psi_\pm) = \exp\left(i \sum_{\nu=1}^{\infty} g^\nu F_\nu^{(\pm)}(\psi_\pm)\right) \tag{1,27}$$

und aus dem Gleichungssystem

$$\tilde{H}_\mu(\psi_\pm)=0 \quad \text{für} \quad \mu=1,2,\ldots\infty\,, \tag{1,28}$$

wobei

$$\Omega^\dagger_\pm\;(\psi_\pm)(H_0(\psi_\pm)+g\,H_1(\psi_\pm))\,\Omega_\pm\;(\psi_\pm)$$
$$=H_0(\psi_\pm)+\sum_{\mu=1}^{\infty} g^\mu\,\tilde{H}_\mu(\psi_\pm)\,, \tag{1,29}$$

sukzessive die $F_\nu^{(\pm)}(\psi_\pm)$ berechnen. Das System besitzt viele Lösungen. Um zu den $F_\nu^{(+)}(\psi_+)$ bzw. $F_\nu^{(-)}(\psi_-)$ zu gelangen, muß man die Asymptotenbedingung (1, 24) heranziehen.

Die eben angedeutete Methode läßt sich auch auf den relativistischen Fall mit nur einer ein- bzw. auslaufenden Teilchensorte übertragen, wobei allerdings prinzipielle Unterschiede auftreten [10]: Die MÖLLER-Operatoren existieren dann nur noch als formalunitäre Ausdrücke, die jedoch aus dem HILBERT-Raum herausführen; dies hängt unmittelbar damit zusammen, daß das relativistische interpolierende Feld in $\mathfrak{H}$ gegenüber den asymptotischen Feldern eine inäquivalente Darstellung erfährt.

An Stelle des störungstheoretischen Vorgehens können wir hier einen anderen Weg einschlagen, der anschaulich die Entwicklung von $\Omega_\pm$ nach Korrelationen von einer wachsenden Zahl beteiligter Teilchen bedeutet.

Aus (1, 17) folgt:

$$\mathcal{N}=\int\psi^\dagger(\mathfrak{r})\,\psi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}=\int\psi^\dagger_\pm(\mathfrak{r})\,\psi_\pm(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r} \tag{1,30}$$

oder mit (1, 16):

$$[\Omega_\pm\,;\mathcal{N}]=0\,. \tag{1,30'}$$

Das unitäre $\Omega_\pm(\psi)$ kann daher nur folgende Form haben:

$$\Omega^\dagger_\pm(\psi)=\exp\Big(i\sum_{\nu=1}^{\infty}G_\nu^{(\pm)}(\psi)\Big) \tag{1,31}$$

mit

$$G_N^{(\pm)}(\psi)=\int\psi^\dagger(\mathfrak{r}_1)\ldots\psi^\dagger(\mathfrak{r}_N)\,g_N(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;\mathfrak{r}_1'\ldots\mathfrak{r}_N')$$
$$\cdot\psi(\mathfrak{r}_N')\ldots\psi(\mathfrak{r}_1')\,d\mathfrak{r}_1\ldots d\mathfrak{r}_N'. \tag{1,32}$$

Es zeigt sich unten, daß $G_1^{(\pm)}(\psi)=0$ sein muß.

Um den Aufbau aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren anzudeuten, schreiben wir in Zukunft oft für Ausdrücke wie $G_N(\psi)$ kurz:

$$G_N(\psi)\sim(\underbrace{\psi^\dagger\ldots\psi^\dagger}_{N}\;\underbrace{\psi\ldots\psi}_{N})\,.$$

Den Ausdruck $\Omega^\dagger_\pm(\psi)\,H(\psi)\,\Omega_\pm(\psi)$ können wir nun in der Form schreiben:

$$\Omega^\dagger_\pm(\psi)\,H(\psi)\,\Omega_\pm(\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\underbrace{\Big[\sum_{\nu=1}^{\infty}G_\nu^{(\pm)}(\psi)\Big[\ldots\Big[\sum_{\mu=1}^{\infty}G_\mu^{(\pm)}(\psi)\,;H(\psi)\Big]\ldots\Big]}_{n\ \text{Klammern}}=H_0(\psi)+\sum_{N=2}^{\infty}\hat{H}_N(\psi)\,. \tag{1,33}$$

Dabei ist nicht mehr nach der Kopplungskonstanten geordnet worden, sondern nach der Struktur der Terme; und zwar soll sein:

$$H_N(\psi)\sim(\underbrace{\psi^\dagger\ldots\psi^\dagger}_{N}\;\underbrace{\psi\ldots\psi}_{N})\,.$$

Die Bedingung (1, 26) verlangt nun, daß die $G_N^{(\pm)}(\psi)$ so bestimmt werden müssen, daß

$$\hat{H}_N(\psi)=0\,. \tag{1,34}$$

Ähnlich (aber nicht gleichbedeutend) der störungstheoretischen Entwicklung führt dies zur sukzessiven Bestimmung der $G_N^{(\pm)}(\psi)$. Aus der Anzahl der jeweils möglichen Kontraktionen und der übrigbleibenden $\psi,\psi^\dagger$-Operatoren in der Summe (1, 33) ergibt sich sofort, daß in $\hat{H}_N(\psi)$ nur die Operatoren $G_2^{(\pm)}(\psi)$ bis $G_N^{(\pm)}(\psi)$ auftreten können. Wir führen die Bestimmung von $G_2^{(\pm)}(\psi)$ explizit durch. Dazu müssen die Terme von

$$H_0(\psi)+g\,H_1(\psi)+i[G_2^{(\pm)}(\psi)\,;H_0(\psi)+g\,H_1(\psi)]\,,$$

welche zu $\hat{H}_2(\psi)$ beitragen, gleich 0 gesetzt werden. (Höhere Kommutatoren von $G_2^{(\pm)}(\psi)$ vernachlässigen wir und setzen $g=1$.) Zweckmäßigerweise gehen wir zu FOURIER-Transformierten über:

$$\tilde{\psi}(\mathfrak{k})=\frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}}\int e^{-i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\,\psi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}\,;\qquad \tilde{V}(|\mathfrak{k}|)=\frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}}\int e^{i\mathfrak{k}\mathfrak{r}}\,V(|\mathfrak{r}|)\,d\mathfrak{r}\,; \tag{1,35}$$

$$\tilde{g}_2^{(\pm)}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_3\,\mathfrak{k}_4)=\frac{1}{(2\,\pi)^6}\int\exp\{-i(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{r}_1+\mathfrak{k}_2\,\mathfrak{r}_2-\mathfrak{k}_3\,\mathfrak{r}_3-\mathfrak{k}_4\,\mathfrak{r}_4)\}\,g_2^{(\pm)}(\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2;\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4)\,d\mathfrak{r}_1\ldots d\mathfrak{r}_4;$$

[10] W. WEIDLICH, Nuovo Cim. 30, 803 [1963].

$$H=\int \tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k})\cdot\frac{\hbar^2\mathfrak{k}^2}{2m}\tilde{\psi}(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}+ \\ +\frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k}_1)\,\tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k}_2)\,\delta(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2-\mathfrak{k}_3-\mathfrak{k}_4)\,\tilde{V}(|\mathfrak{k}_2-\mathfrak{k}_3|)\,\tilde{\psi}(\mathfrak{k}_3)\,\tilde{\psi}(\mathfrak{k}_4)\,d\mathfrak{k}_1\dots d\mathfrak{k}_4\,. \tag{1,7'}$$

Für $\tilde{g}_2^{(\pm)}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_3\,\mathfrak{k}_4)$ ergibt sich dann die folgende Integralgleichung:

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\mathfrak{k}_1^2+\mathfrak{k}_2^2-\mathfrak{k}_3^2-\mathfrak{k}_4^2)\,\tilde{g}_2^{(\pm)}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_3\,\mathfrak{k}_4) \\ =\frac{(-i)}{8(2\pi)^{3/2}}\delta(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2-\mathfrak{k}_3-\mathfrak{k}_4)(\tilde{V}(|\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_3|)+\tilde{V}(|\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}_4|)+\tilde{V}(|\mathfrak{k}_2-\mathfrak{k}_3|)+\tilde{V}(|\mathfrak{k}_2-\mathfrak{k}_4|)) \\ -\frac{1}{4(2\pi)^3}\int d\mathfrak{k}'\,d\mathfrak{k}''\,\{\,\delta(\mathfrak{k}_1+\mathfrak{k}_2-\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}'')\,(\tilde{V}(|\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}'|)+\tilde{V}(|\mathfrak{k}_1-\mathfrak{k}''|) \\ +\tilde{V}(|\mathfrak{k}_2-\mathfrak{k}'|)+\tilde{V}(|\mathfrak{k}_2-\mathfrak{k}''|))\,\tilde{g}_2^{(\pm)}(\mathfrak{k}'\,\mathfrak{k}'';\mathfrak{k}_3\,\mathfrak{k}_4) \\ -\tilde{g}_2^{(\pm)}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}'\,\mathfrak{k}'')\,\delta(\mathfrak{k}'+\mathfrak{k}''-\mathfrak{k}_3-\mathfrak{k}_4)\,(\tilde{V}(|\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}_3|)+\tilde{V}(|\mathfrak{k}'-\mathfrak{k}_4|)+\tilde{V}(|\mathfrak{k}''-\mathfrak{k}_3|)+\tilde{V}(|\mathfrak{k}''-\mathfrak{k}_4|))\}\,. \tag{1,36}$$

Ähnliche Integralgleichungen ergeben sich für alle $\tilde{g}_N(\mathfrak{k}_1\dots\mathfrak{k}_N;\mathfrak{k}_1'\dots\mathfrak{k}_N')$.

Ihre Lösung entspricht jeweils der Aufsummation eines unendlichen Potenzreihenausdrucks in der Kopplungskonstanten $g$. Die Lösung von (1, 36) ist nicht eindeutig wegen der Singularität, die sich beim Dividieren durch den Ausdruck

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\mathfrak{k}_1^2+\mathfrak{k}_2^2-\mathfrak{k}_3^2-\mathfrak{k}_4^2)$$

ergibt.

Es zeigt sich, daß man gerade $\tilde{g}_2^{(\pm)}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_3\,\mathfrak{k}_4)$ erhält, wenn man diesen Ausdruck durch

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathfrak{k}_1^2+\mathfrak{k}_2^2-\mathfrak{k}_3^2-\mathfrak{k}_4^2\pm i\,\varepsilon)$$

ersetzt (entsprechend in den höheren $\tilde{g}_N^{(\pm)}$).

B e w e i s : Drücken wir

$$\psi^{\dagger}=\Omega_{\pm}^{\dagger}(\psi_{\pm})\,\psi_{\pm}^{\dagger}\,\Omega(\psi_{\pm}^{\dagger}\,\Omega(\psi_{\pm})$$

durch $\psi_{\pm}$ aus, so ergibt sich auf Grund der Struktur (1, 31) von $\Omega_{\pm}(\psi_{\pm})$ folgender allgemeiner Aufbau:

$$\psi^{\dagger}\sim(\psi_{\pm}^{\dagger})+(\psi_{\pm}^{\dagger}\,\psi_{\pm}^{\dagger}\psi)+(\psi_{\pm}^{\dagger}\psi_{\pm}^{\dagger}\,\psi_{\pm}^{\dagger}\,\psi\,\psi)+\dots\,. \tag{1,37}$$

Dabei tragen zum Term $(\underbrace{\psi_{\pm}^{\dagger}\dots\psi_{\pm}^{\dagger}}_{N+1}\;\underbrace{\psi_{\pm}\dots\psi_{\pm}}_{N})$ nur die Glieder $G_2^{(\pm)}(\psi_{\pm})$ bis $G_{N+1}^{(\pm)}(\psi_{\pm})$ von $\Omega_{\pm}(\psi_{\pm})$ bei. Explizit erhalten wir z. B. für $\chi_{\pm}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_1'\,\mathfrak{k})$ in

$$\tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k})=\tilde{\psi}_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k})+\int\tilde{\psi}_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k}_1)\,\tilde{\psi}_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k}_2)\,\tilde{\psi}_{\pm}(\mathfrak{k}_1') \\ \cdot\chi_{\pm}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_1'\,\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}_1\,d\mathfrak{k}_2\,d\mathfrak{k}_1'+\dots; \tag{1,37'}$$

$$\chi_{\pm}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_1'\,\mathfrak{k})=i\,\{\tilde{g}_2^{(\pm)}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_1'\,\mathfrak{k})+\tilde{g}_2^{(\pm)}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}_1')\}\,. \tag{1,38}$$

Verwenden wir nun

$$\tilde{\psi}_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k}_1;t)=\exp\left\{\frac{i}{\hbar}H\,t\right\}\tilde{\psi}_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k})\exp\left\{\frac{-i}{\hbar}H\,t\right\} \\ =\exp\left\{\frac{i}{\hbar}E(\mathfrak{k})\,t\right\}\tilde{\psi}_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k});\quad E(\mathfrak{k})=\frac{\hbar^2\mathfrak{k}^2}{2m}; \tag{1,39}$$

ferner, analog (1, 23), mit

$$\varphi_{\alpha}(\mathfrak{k};t)=\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E(\mathfrak{k})\,t\right\}f_{\alpha}(\mathfrak{k}),$$

$$\tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(t)=\int\tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k};t)\,\varphi_{\alpha}(\mathfrak{k};t)\,d\mathfrak{k} \\ =\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}H\,t\right\}\tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k})\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H\,t\right\}\varphi_{\alpha}(\mathfrak{k};t)\,d\mathfrak{k}\,,$$

$$\tilde{\psi}_{\pm\alpha}^{\dagger}=\int\tilde{\psi}_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k})\,f_{\alpha}(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k} \tag{1,40}$$

und die bekannten Formeln:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\exp\{-i\,\omega\,t\}}{\omega\pm i\,\varepsilon}\to 0\quad\text{für}\quad t\to\mp\infty\,, \tag{1,41}$$

so ergibt sich, daß im Limes $t\to+\infty$ jeweils die Matrixelemente aller Terme außer dem ersten in der Entwicklung

$$\tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(t)=\tilde{\psi}_{+\alpha}^{\dagger}+\int\tilde{\psi}_{+}^{\dagger}(\mathfrak{k}_1)\,\tilde{\psi}_{+}^{\dagger}(\mathfrak{k}_2)\,\tilde{\psi}_{+}(\mathfrak{k}_1') \\ \cdot\exp\left\{\frac{i}{\hbar}[E(\mathfrak{k}_1)+E(\mathfrak{k}_2)-E(\mathfrak{k}_1')-E(\mathfrak{k})]\,t\right\} \\ \cdot\chi_{+}(\mathfrak{k}_1\,\mathfrak{k}_2;\mathfrak{k}_1'\,\mathfrak{k})\,f_{\alpha}(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}_1\,d\mathfrak{k}_2\,d\mathfrak{k}_1'\,d\mathfrak{k}+\dots \tag{1,37}$$

verschwinden, wenn wir für $\chi_+$ bzw. $\tilde{g}_2^{(+)}$ und die höheren $\tilde{g}_N^{(+)}$ die oben vorgeschriebenen Lösungen der Integralgleichungen verwenden [entsprechend $\tilde{g}_N^{(-)}$ bei der Entwicklung von $\tilde{\psi}_{\alpha}^{+}(t)$ nach $\tilde{\psi}_{-}(\mathfrak{k})$. Im Sinne der schwachen Konvergenz gilt dann jedenfalls

$$\tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(t)\to\tilde{\psi}_{\pm\alpha}^{\dagger}\ \text{für}\quad t\to\pm\infty\,.$$

Daß diese Konvergenz sogar stark ist, haben wir vorher gesehen.

Nachdem wir im Prinzip die $\Omega_{\pm}(\psi)$ berechnen können, ergeben sich für die feldtheoretische $S$-Matrix, welche durch

$$\psi_-=S\,\psi_+\,S^{-1} \tag{1,42}$$

definiert ist, unter Verwendung von (1, 16), (1, 25) verschiedene Formen, je nachdem, in welchen Operatoren man sie ausdrückt:

$$S = \Omega_-(\psi)\,\Omega_+^\dagger(\psi) = \Omega_-(\psi_-)\,\Omega_+^\dagger(\psi_+)$$
$$= \Omega_-(\psi_-)\,\Omega_+^\dagger(\Omega_-^\dagger(\psi_-)\,\psi_-\,\Omega_-(\psi_-))$$
$$= \Omega_+^\dagger(\psi_-)\,\Omega_-(\psi_-)$$
$$= \Omega_-(\Omega_+^\dagger(\psi_+)\,\psi_+\,\Omega_+(\psi_+))\,\Omega_+^\dagger(\psi_+)$$
$$= \Omega_+^\dagger(\psi_+)\,\Omega_-(\psi_+) \qquad (1,43)$$

Schließlich machen wir noch eine Bemerkung, welche auf die Problematik des Axioms der Quantentheorie hinweist, wonach „jedem hermiteschen Operator eine Observable, d. h. eine Meßgröße entspricht". Wir hatten $\psi^\dagger(\mathfrak{r};t)$ als den Erzeugungsoperator für ein Teilchen am Ort $\mathfrak{r}$ zur Zeit $t$ interpretiert. Dementsprechend ist

$$\mathcal{N}(V;t) = \int_V \psi^\dagger(\mathfrak{r};t)\,\psi(\mathfrak{r};t)\,d\mathfrak{r}$$

der Operator für die Anzahl der Teilchen in $V$ zur Zeit $t$. An seinem Erwartungswert läßt sich die raumzeitliche Ausbreitung der Teilchen vermöge der Wechselwirkung verfolgen [vgl. (1, 14)].

Der HILBERT-Raum wird nun andererseits zwar in formal gleichberechtigter Weise auch mittels der Operatoren $\psi_+^\dagger(\mathfrak{r};t)$ oder $\psi_-^\dagger(\mathfrak{r};t)$ aufgebaut; gäbe es jedoch eine Meßapparatur, die statt der $\psi$-Teilchen „$\psi_-$-Teilchen" oder „$\psi_+$-Teilchen" messen könnte –

$$(\mathcal{N}_\pm(V;t) = \int_V \psi_\pm^\dagger(\mathfrak{r};t)\,\psi_\pm(\mathfrak{r};t)\,d\mathfrak{r}$$

wäre dann der Operator für die Anzahl der $\psi_\pm$-Teilchen in $V$), so würde sich eine wechselwirkungsfreie Ausbreitung dieser „Teilchen" herausstellen, denn die $\psi_\pm(\mathfrak{r};t)$ genügen der freien SCHRÖDINGER-Gleichung. In Wirklichkeit messen normale Apparate „von selbst" wechselwirkende Teilchen, deren räumliches Verhalten mit dem interpolierenden Feld $\psi(\mathfrak{r};t)$ zu beschreiben ist, und es ist fraglich, ob z. B. den Operatoren $\mathcal{N}_\pm(V;t)$ überhaupt eine physikalische Observable zugeordnet werden kann.

## 2. Das Mehrkanalsystem

Wir beginnen wieder mit der Behandlung der $N$-Teilchen Konfigurationsräume und schließen uns der Formulierung von GRAWERT und PETZOLD [11] an. Im Gegensatz zum einfachen Streusystem läßt sich nicht mehr jeder Lösung $\psi^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)$ eine Wellenfunktion $\varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)$ von $N$ frei auseinanderlaufenden Teilchen zuordnen, nach welcher $\psi^{(N)}$ für $t\to+\infty$ bzw. $t\to-\infty$ konvergiert. Wenn das Wechselwirkungspotential gebundene Zustände zuläßt, zerfällt vielmehr die Gesamtheit der Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung in verschiedene „Kanäle".

Ein Kanal $\gamma_\pm \subset \mathfrak{H}^{(N)}$ ist durch eine Aufteilung $\{F_1\ldots F_l\}$ der $N$ Koordinaten in $l$ „Fragmente" $F=\{\mathfrak{r}_j\ldots\mathfrak{r}_{j_n}\}$ charakterisiert, wobei

$$\psi_{\gamma N}^{(\pm)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)\in\gamma_\pm \quad \text{für} \quad t\to\pm\infty$$

stark nach einem Wellenpaket $\varphi_\gamma^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)$ von $l$ frei auseinanderlaufenden Fragmenten konvergiert; dabei bleiben in $\varphi_\gamma^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)$ die zu einem Fragment $F_j$ gehörigen Teilchen jeweils in einem gebundenen Zustand zusammen. (Da wir symmetrische Zustände

$$\psi_\pm^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t) \text{ bzw. } \varphi^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)$$

betrachten, führt die Permutation von Teilchenkoordinaten nicht zu neuen Kanälen.) Es kann gezeigt werden [11], daß zu verschiedenen Kanälen $\gamma_+$, $\gamma_+'$ gehörige $\psi_{\gamma+}^{(N)}$, $\psi_{\gamma+'}^{(N)}$ zueinander orthogonal sind. Dies ist jedoch nicht der Fall für die zugehörigen $\varphi_\gamma^{(N)}$; z. B. bilden die $\varphi_{\gamma_0}^{(N)}(\mathfrak{r}_1\ldots\mathfrak{r}_N;t)$, welche $N$ einzelne frei auseinanderlaufende Teilchen beschreiben, allein schon ganz $\mathfrak{H}^{(N)}$. Die Kanäle zerfallen in orthogonale Unterkanäle, je nachdem, in welchen Bindungszuständen sich die Fragmente befinden.

Bei der Übertragung in die Feldtheorie läßt sich alles Wesentliche an dem einfachsten, nichttrivialen Fall erkennen, den wir im folgenden benutzen:

Es soll in allen $N$-Teilchenräumen neben den ungebundenen Einzelteilchen nur eine einzige Sorte von ein- bzw. auslaufenden Fragmenten geben können, nämlich Fragmente, bestehend aus zwei Teilchen, die in einem $S$-Zustand mit Bindungsenergie $\varepsilon$ gebunden sind. Wir können uns ein solches Mehrkanalsystem realisiert denken durch die Annahme eines schwach anziehenden Zweiteilchenpotentials (welches nur einen gebundenen Zustand zweier Teilchen zuläßt) und abstoßender Dreikörperpotentiale, welche die Bildung von Fragmenten mit höherer Teilchenzahl verhindern. Wir untersuchen nun die Struktur der $N$-Teilchenräume, insbesondere $N=1$, 2, 3, und gehen dabei zu nichtnormierten Impuls- und Energieeigenzuständen über.

Die Wellenfunktionen für das freie Einzelteilchen bzw. das freie Fragment und ihre FOURIER-Transformierten sind:

$$f_\mathfrak{k}(\mathfrak{r};t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\{i(\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}-\omega(\mathfrak{k})\,t)\};$$
$$\tilde{f}_\mathfrak{k}(\mathfrak{p};t) = \exp\{-i\,\omega(\mathfrak{p})\,t\}\;\delta(\mathfrak{p}-\mathfrak{k}); \qquad (2,1)$$

[11] G. GRAWERT u. J. PETZOLD, Z. Naturforschg. **15 a**, 311 [1960].

$$F_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2;t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\exp\{i(\mathfrak{K}\cdot\mathfrak{R}-\Omega(\mathfrak{K})\,t)\}\cdot\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,\varepsilon\,t\right\}\varrho(|\,\mathfrak{r}\,|)\,;$$

$$\tilde F_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2;t)=\exp\left\{-i\left(\Omega(\mathfrak{K})-\frac{\varepsilon}{\hbar}\right)\right\}t\cdot\delta(\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2-\mathfrak{K})\,\tilde\varrho(|\,\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2\,|)\qquad(2,2)$$

mit $\omega(\mathfrak{k})=\tfrac12\hbar\,\mathfrak{k}^2/m$; $\Omega(\mathfrak{K})=\tfrac12\hbar\,\mathfrak{K}^2/M$:

$$M=2\,m;\quad \mathfrak{R}=\tfrac12(\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2)\,;\quad \mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2\,.$$

Die Energieeigenlösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung im Impulsraum zerfallen z. B. in den Räumen $N=1, 2, 3$ in folgende Kanäle:

$$N=1:\quad \tilde\psi^{(1)}_{\pm\mathfrak{k}}\,(\mathfrak{p};t)\equiv\tilde f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p};t)\,;\quad E=\tfrac12\hbar^2\,\mathfrak{k}^2/m\,.$$

$$N=2:\quad \tilde\psi^{(2)}_{\pm\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2}\,(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2;t)\to\{\tilde f_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{p}_1;t)\,\tilde f_{\mathfrak{k}_2}(\mathfrak{p}_2;t)\}_{\text{sym}}\quad\text{für}\quad t\to\pm\infty\,,$$

$$E=\tfrac12\hbar^2\,\mathfrak{k}_1{}^2/m+\tfrac12\hbar^2\,\mathfrak{k}_2{}^2/m;$$

$$\tilde\psi^{(2)}_{\pm\mathfrak{K}}(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2;t)\equiv\tilde F_{\mathfrak{K}}\,(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2;t),\quad E=\tfrac12\hbar^2\,\mathfrak{K}^2/M-\varepsilon\,.$$

$$N=3:\quad \tilde\psi^{(3)}_{\pm\mathfrak{k}_1\mathfrak{k}_2\mathfrak{k}_3}\,(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3;t)\to\{\tilde f_{\mathfrak{k}_1}(\mathfrak{p}_1;t)\,\tilde f_{\mathfrak{k}_2}(\mathfrak{p}_2;t)\,\tilde f_{\mathfrak{k}_3}(\mathfrak{p}_3;t)\}_{\text{sym}}\quad\text{für}\quad t\to\pm\infty\,,$$

$$E=\frac{\hbar^2}{2\,m}\,(\mathfrak{k}_1{}^2+\mathfrak{k}_2{}^2+\mathfrak{k}_3{}^2)\,;$$

$$\tilde\psi^{(3)}_{\pm\mathfrak{K}\mathfrak{k}}\,(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\,\mathfrak{p}_3;t)\to\{\tilde F_{\mathfrak{K}}\,(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2;t)\,\tilde f_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{p}_3;t)\}_{\text{sym}}\quad\text{für}\quad t\to\pm\infty\,,$$

$$E=\tfrac12\hbar^2\,\mathfrak{k}^2/m+\tfrac12\hbar^2\,\mathfrak{K}^2/M-\varepsilon\,.\qquad(2,3)$$

$\{\}_{\text{sym}}$ bedeutet Symmetrisierung hinsichtlich $\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_N$. Allgemein gibt es im $N=(2\,n+1)$- und $N=2\,n$-Teilchenraum $(n+1)$ Kanäle $\gamma_\pm$ entsprechend der Anzahl von $0, 1\ldots n$ ein- bzw. auslaufenden Zweiteilchenfragmenten.

Für die Feldtheorie ist der Ausgangspunkt wieder der HAMILTON-Operator:

$$H=\int\psi^\dagger(\mathfrak{r})\left(-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\Delta\right)\psi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}+\tfrac12\int\psi^\dagger(\mathfrak{r})\,\psi^\dagger(\mathfrak{r}')\,V(|\,\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'\,|)\,\psi(\mathfrak{r}')\,\psi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}'+\tfrac16\int\psi^\dagger(\mathfrak{r})\,\psi^\dagger(\mathfrak{r}')\psi^\dagger(\mathfrak{r}'')\,W(\mathfrak{r}-\mathfrak{r}';\mathfrak{r}-\mathfrak{r}'')\cdot\psi(\mathfrak{r}'')\,\psi(\mathfrak{r}')\,\psi(\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}'\,d\mathfrak{r}''\,,\qquad(2,4)$$

der jetzt evtl. Dreikörperpotentiale enthält. Unser Ziel ist es, entsprechend den nunmehr asymptotisch für $t\to\pm\infty$ vorhandenen zwei Teilchensorten zwei kanonische Felder einzuführen:

$$A_\pm(\mathfrak{r};t)=e^{(i/\hbar)\,H\,t}\,A_\pm(\mathfrak{r})\,e^{-(i/\hbar)\,H\,t}\,;$$

$$A_\pm(\mathfrak{r})=\frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}}\int e^{i\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}}\,a_\pm(\mathfrak{k})\,;$$

$$B_\pm(\mathfrak{r};t)=e^{(i/\hbar)\,H\,t}\,B_\pm(\mathfrak{r})\,e^{-(i/\hbar)\,H\,t}\,;$$

$$B_\pm(\mathfrak{r})=\frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}}\int e^{i\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}}\,b_\pm(\mathfrak{k})\,.\qquad(2,5)$$

**1.** Sie sollen den kanonischen Vertauschungsrelationen genügen und untereinander vertauschbar sein.

**2.** Da jeder Zustand des HILBERT-Raumes durch die asymptotisch für $t\to\pm\infty$ als quasifreie Wellenpakete vorhandenen Teilchensorten charakterisiert werden kann, soll sich der HILBERT-Raum $\mathfrak{H}$ (der als FOCK-Raum $\mathfrak{H}_\psi$ des interpolierenden Feldes aufgebaut wurde) als Produktraum der FOCK-Räume $\mathfrak{H}_a$ und $\mathfrak{H}_b$ schreiben lassen:

$$\mathfrak{H}_\psi=\mathfrak{H}_{a_+}\otimes\mathfrak{H}_{b_+}=\mathfrak{H}_{a_-}\otimes\mathfrak{H}_{b_-}\,.\qquad(2,6)$$

**3.** In Verallgemeinerung von (1, 19) sollen sich der HAMILTON-Operator und die Gesamtimpulsoperatoren gemäß der Bedeutung der asymptotischen Felder in folgender Form schreiben lassen [vgl. auch [6]].

$$H=\int a_\pm^\dagger(\mathfrak{k})\,\frac{\hbar^2\,\mathfrak{k}^2}{2\,m}\,a_\pm(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}+\int b_\pm^\dagger(\mathfrak{K})\left(\frac{\hbar^2\,\mathfrak{K}^2}{2\,M}-\varepsilon\right)b_\pm(\mathfrak{K})\,d\mathfrak{K};$$

$$\mathfrak{P}=\int a_\pm^\dagger(\mathfrak{k})\,\mathfrak{k}\,a_\pm(\mathfrak{k})\,d\mathfrak{k}+\int b_\pm^\dagger(\mathfrak{K})\,\mathfrak{K}\,b_\pm(\mathfrak{K})\,d\mathfrak{K}\,.\qquad(2,7)$$

Schon aus (2, 6) wird klar, daß $a_\pm(\mathfrak{k})$ bzw. $b_\pm(\mathfrak{K})$ nicht äquivalent zu $\psi(\mathfrak{k})$ sein können, daß also kein unitäres $\Omega_\pm$ wie in (1, 16) existieren kann. Jedoch erhalten wir Aufschluß über die Struktur der Operatoren $a_\pm(\mathfrak{k})$, $b_\pm(\mathfrak{K})$ durch folgende Überlegung: Die Anwendung von $a_\pm^\dagger(\mathfrak{k})$ auf einen $N$-Teilchenzustand (im Sinne des Aufbaus von $\mathfrak{H}$ als FOCK-Raum von $\psi$) muß einen $(N+1)$-Teilchenzustand ergeben; Anwendung von $b_\pm^\dagger(\mathfrak{K})$ dagegen ergibt einen $(N+2)$-Teilchenzustand, da die Fragmente aus zwei Teilchen im Sinne des $\psi$-Operators bestehen. Daraus ergibt sich folgende allgemeine Form von $a_\pm^\dagger(\mathfrak{k})$ und $b_\pm^\dagger(\mathfrak{K})$:

$$a_\pm^\dagger\sim\sum_{n=0}^{\infty}(\underbrace{\psi^\dagger\,\psi^\dagger\ldots\psi^\dagger}_{n+1}\;\underbrace{\psi\,\psi\ldots\psi}_{n})\,,$$

$$b_\pm^\dagger\sim\sum_{n=0}^{\infty}(\underbrace{\psi^\dagger\,\psi^\dagger\ldots\psi^\dagger}_{n+2}\;\underbrace{\psi\,\psi\ldots\psi}_{n})\qquad(2,8)$$

bzw. explizit:

$$a_\pm^\dagger(\mathfrak{k})=\sum_{n=0}^{\infty}\int\alpha_\pm(\mathfrak{k}_1\ldots\mathfrak{k}_{n+1};\mathfrak{k}_1'\ldots\mathfrak{k}_n';\mathfrak{k})\cdot\tilde\psi^\dagger(\mathfrak{k}_1)\ldots\tilde\psi^\dagger(\mathfrak{k}_{n+1})\,\tilde\psi(\mathfrak{k}_1')\ldots\tilde\psi(\mathfrak{k}_n')\cdot d\mathfrak{k}_1\ldots d\mathfrak{k}_{n+1}\,d\mathfrak{k}_1'\ldots d\mathfrak{k}_n',$$

$$b_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \beta_{\pm}(\mathfrak{k}_1 \ldots \mathfrak{k}_{n+2}; \mathfrak{k}_1' \ldots \mathfrak{k}_n'; \mathfrak{K}) \cdot \tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k}_1) \ldots \tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k}_{n+2})\, \tilde{\psi}(\mathfrak{k}_1') \ldots \tilde{\psi}(\mathfrak{k}_n') \cdot d\mathfrak{k}_1 \ldots d\mathfrak{k}_{n+2}\, d\mathfrak{k}_1' \ldots d\mathfrak{k}_n' \quad (2,8')$$

Andererseits muß sich nach (2, 6) $\psi$ auch durch $a_{\pm}$, $b_{\pm}$ ausdrücken lassen, da mit Hilfe beider Operatorensorten der HILBERT-Raum ebenfalls aufgebaut werden kann. Beachten wir, daß Anwendung von $\psi^{\dagger}$ die Teilchenzahl um eins erhöht, so ergibt sich als Umkehrung von (2, 8) folgende allgemeine Form:

$$\psi^{\dagger} \sim \sum_{\substack{(2n+m)\\=(2n'+m'+1)}} (\underbrace{b_{\pm}^{\dagger} \ldots b_{\pm}^{\dagger}}_{n}\ \underbrace{a_{\pm}^{\dagger} \ldots a_{\pm}^{\dagger}}_{m}\ \underbrace{b_{\pm} \ldots b_{\pm}}_{n'}\ \underbrace{a_{\pm} \ldots a_{\pm}}_{m'}) \quad (2,9)$$

bzw. explizit:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{k}) = \sum_{\substack{(2n+m)\\=(2n'+m'+1)}} \int \chi_{\pm}(&\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n; \mathfrak{k}_1 \ldots \mathfrak{k}_m; \mathfrak{K}_1' \ldots \mathfrak{K}_{n'}'; \mathfrak{k}_1' \ldots \mathfrak{k}_{m'}'; \mathfrak{k}) \\ &\cdot b_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{K}_1) \ldots b_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{K}_n)\, a_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k}_1) \ldots a_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k}_m) \qquad (2,9') \\ &\cdot b_{\pm}(\mathfrak{K}_1') \ldots b_{\pm}(\mathfrak{K}_{n'}')\, a_{\pm}(\mathfrak{k}_1') \ldots a_{\pm}(\mathfrak{k}_{m'}') \\ &\cdot d\mathfrak{K}_1 \ldots d\mathfrak{K}_n\, d\mathfrak{K}_1' \ldots d\mathfrak{K}_{n'}'\, d\mathfrak{k}_1 \ldots d\mathfrak{k}_m\, d\mathfrak{k}_1' \ldots d\mathfrak{k}_{m'}'.\end{aligned}$$

Die entscheidende Aufgabe besteht nun darin, die Koeffizienten $\alpha_{\pm}$, $\beta_{\pm}$ und $\chi_{\pm}$ zu berechnen. Aus der Anwendung der kanonischen Vertauschungsrelationen für $a_{\pm}(\mathfrak{k})$, $b_{\pm}(\mathfrak{K})$, $\tilde{\psi}(\mathfrak{k})$ ergeben sich zwar einschränkende Bedingungen für $\alpha_{\pm}$, $\beta_{\pm}$, $\chi_{\pm}$, aber offenbar werden sie dadurch nicht festgelegt. Denn 1. müssen die voneinander verschiedenen Systeme $\{\alpha_+, \beta_+, \chi_+\}$ und $\{\alpha_-, \beta_-, \chi_-\}$ zu denselben Vertauschungsrelationen führen, 2. müssen diese unabhängig von der Form des gebundenen Zustands im Zweiteilchenfragment gelten, während $\alpha, \beta, \chi$ von dieser Form abhängen.

Wir geben nun zwei Methoden zur sukzessiven Bestimmung der Koeffizienten an, wobei wir die zweite bis zur expliziten Durchführung verfolgen.

a) Setzt man in die beiden Formen (2, 4) bzw. (2, 7) des HAMILTON-Operators die Entwicklungen (2, 9) bzw. (2, 8) ein, so erhält man einmal für $H$ einen Ausdruck:

$$H \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{\psi^{\dagger} \ldots \psi^{\dagger}}_{n}\ \underbrace{\psi \ldots \psi}_{n}),$$

im andern Fall

$$H \sim \sum_{\substack{(2n+m)\\=(2n'+m')}} (\underbrace{b_{\pm}^{\dagger} \ldots b_{\pm}^{\dagger}}_{n}\ \underbrace{a_{\pm}^{\dagger} \ldots a_{\pm}^{\dagger}}_{m}\ \underbrace{b_{\pm} \ldots b_{\pm}}_{n'}\ \underbrace{a_{\pm} \ldots a_{\pm}}_{m'})$$

Andererseits muß beim Einsetzen von (2, 9) in (2, 4) die Form (2, 7) hervorgehen, und bei Einsetzen von (2, 8) in (2, 7) die Form (2, 4).

Diese Bedingung ergibt ein System gekoppelter Integralgleichungen für die $\alpha_{\pm}$, $\beta_{\pm}$ bzw. für die $\chi_{\pm}$. Unter Heranziehung der Asymptotenbedingung müssen aus der Lösungsmannigfaltigkeit die Lösungen $\alpha_+, \beta_+, \chi_+$ bzw. $\alpha_-, \beta_-, \chi_-$ herausgesucht werden. Diese Methode entspricht offenbar derjenigen zur Bestimmung von $\Omega_{\pm}$ in Abschnitt 1.

b) Wir wollen statt dessen einen *anderen* Weg einschlagen, bei dem die Koeffizienten $\alpha$, $\beta$, $\chi$ direkt durch die als bekannt vorausgesetzten Streulösungen (2, 3) ausgedrückt werden. Dazu schreiben wir in Verallgemeinerung von (1, 17):

$$\begin{aligned}&\int \tilde{\psi}^{(2n+m)}_{\pm \mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n \mathfrak{k}_1 \ldots \mathfrak{k}_m}(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{2n+m}; t)\, \tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{p}_1; t) \ldots \tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{p}_{2n+m}; t)\, d\mathfrak{p}_1 \ldots d\mathfrak{p}_{2n+m}\, \Phi_0 \\ &= \int \tilde{\psi}^{(2n+m)}_{\pm \mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n \mathfrak{k}_1 \ldots \mathfrak{k}_m}(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{2n+m}; 0)\, \tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{p}_1) \ldots \tilde{\psi}^{\dagger}(\mathfrak{p}_{2n+m})\, d\mathfrak{p}_1 \ldots d\mathfrak{p}_{2n+m}\, \Phi_0 \\ &= b_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{K}_1) \ldots b_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{K}_n)\, a_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k}_1) \ldots a_{\pm}^{\dagger}(\mathfrak{k}_m)\, \Phi_0. \qquad (2,10)\end{aligned}$$

Rechts darf es auf die Reihenfolge der $b^{\dagger}$- und $a^{\dagger}$-Operatoren nicht ankommen. Daß der HAMILTON-Operator bei Gültigkeit von (2, 10) in $a_{\pm}$, $b_{\pm}$ die Form (2, 7) haben muß, folgt daraus, daß die Zustände (2, 10) auf Grund der Wahl von

$$\tilde{\psi}^{(2n+m)}_{\pm \mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n \mathfrak{k}_1 \ldots \mathfrak{k}_m}(\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_{2n+m}; 0)$$

Energiezustände zu $E = \sum_{i=1}^{m} \frac{\hbar^2 \mathfrak{k}_i^2}{2m} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\hbar^2 \mathfrak{K}_j^2}{2M} - \varepsilon\right)$ sind.

Setzen wir nun andererseits in den Gln. (2, 10) entweder (2, 8′) oder (2, 9′) ein, so gelingt die sukzessive Bestimmung der Koeffizienten $\alpha$, $\beta$, $\chi$. Beim Vergleich der $N$-Teilchenzustände für $N = 1, 2, 3$ erhalten wir explizit mit (2, 3):

$$\alpha_\pm(\mathfrak{k}_1; \mathfrak{k}) = \delta(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}); \tag{2, 11}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; \mathfrak{K}) &= \tilde{F}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; 0), \\ \alpha_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; \mathfrak{k}_1'; \mathfrak{k}) &= \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k} \mathfrak{k}'_1}(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; 0) - \{\delta(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k})\, \delta(\mathfrak{k}_2 - \mathfrak{k}_1')\}_{\mathrm{sym}}; \end{aligned}\right\} \tag{2, 12}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; \mathfrak{k}_1'; \mathfrak{K}) &= \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K} \mathfrak{k}'_1}(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; 0) - \{\delta(\mathfrak{k}_1' - \mathfrak{k}_1)\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; 0)\}_{\mathrm{sym}}, \\ 2 \int \alpha_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; \mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_2''; \mathfrak{k})\, & \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k}'_1 \mathfrak{k}'_2}(\mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_2''; 0)\, d\mathfrak{k}_1''\, d\mathfrak{k}_2'' \\ &= \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k} \mathfrak{k}'_1 \mathfrak{k}'_2}(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; 0) - \{\delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_1)\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k}'_1 \mathfrak{k}'_2}(\mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; 0)\}_{\mathrm{sym}} \\ &\quad - 2 \int \{\alpha_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; \mathfrak{k}_1''; \mathfrak{k})\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k}'_1 \mathfrak{k}'_2}(\mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_3; 0)\}_{\mathrm{sym}}\, d\mathfrak{k}_1''; \\ 2 \int \alpha_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; \mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_2''; \mathfrak{k})\, & \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_2''; 0)\, d\mathfrak{k}_1''\, d\mathfrak{k}_2'' \\ &= \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K} \mathfrak{k}}(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; 0) - \{\delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_1)\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; 0)\}_{\mathrm{sym}} \\ &\quad - 2 \int \{\alpha_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; \mathfrak{k}_1''; \mathfrak{k})\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_3; 0)\}_{\mathrm{sym}}\, d\mathfrak{k}_1''. \end{aligned}\right\} \tag{2, 13}$$

( { } bezüglich $\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3$)

Die zwei letzten Gleichungen bestimmen

$$\alpha_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2 \mathfrak{k}_3; \mathfrak{k}_1' \mathfrak{k}_2'; \mathfrak{k})$$

vollständig, weil

$$\tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k}'_1 \mathfrak{k}'_2}(\mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_2''; 0) \quad \text{und} \quad \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_2''; 0)$$

ein vollständiges Orthogonalsystem im Raum der symmetrischen Funktionen $f(\mathfrak{k}_1'' \mathfrak{k}_2'')$ bilden.

Analog ergibt sich für die $\chi_\pm$ mit $N = 1, 2$:

$$\chi_\pm(\mathfrak{k}_1; \mathfrak{k}) = \delta(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_1); \tag{2, 14}$$

$$\begin{aligned} &\text{a)} \int \chi_\pm(\mathfrak{K}_1; \mathfrak{k}_1'; \mathfrak{k})\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k}''_1 \mathfrak{k}''_2}(\mathfrak{k}_1' \mathfrak{k}; 0)\, d\mathfrak{k}_1'\, d\mathfrak{k} = 0; \\ &\text{b)} \int \chi_\pm(\mathfrak{K}_1; \mathfrak{k}_1'; \mathfrak{k})\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_1' \mathfrak{k}; 0)\, d\mathfrak{k}_1'\, d\mathfrak{k} \\ &\qquad = \delta(\mathfrak{K}_1 - \mathfrak{K}); \\ &\text{c)} \int \chi_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; \mathfrak{k}_1'; \mathfrak{k})\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k}''_1 \mathfrak{k}''_2}(\mathfrak{k}_1' \mathfrak{k}; 0)\, d\mathfrak{k}_1'\, d\mathfrak{k} \\ &= \{\delta(\mathfrak{k}_1'' - \mathfrak{k}_1)\, \delta(\mathfrak{k}_2'' - \mathfrak{k}_2)\}_{\mathrm{sym}} - \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{k}''_1 \mathfrak{k}''_2}(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; 0); \\ &\text{d)} \int \chi_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; \mathfrak{k}_1'; \mathfrak{k})\, \tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_1' \mathfrak{k}; 0)\, d\mathfrak{k}_1'\, d\mathfrak{k} \\ &\qquad = -\tilde{\psi}_{\pm \mathfrak{K}}(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2). \end{aligned} \tag{2, 15}$$

a) und b) bestimmen $\chi_\pm(\mathfrak{K}_1; \mathfrak{k}_1'; \mathfrak{k})$ vollständig, ebenso c) und d) das $\chi_\pm(\mathfrak{k}_1 \mathfrak{k}_2; \mathfrak{k}_1'; \mathfrak{k})$.

Obwohl die Struktur der gebundenen Fragmente z. B. in $H$ nach (2, 7) nicht mehr explizit zum Ausdruck kommt, geht sie doch in komplizierter Weise in den Zusammenhang zwischen interpolierenden und asymptotischen Feldern ein, wie schon (2, 11) bis (2, 15) zeigen. Auch im Mehrkanalsystem läßt sich nun eine unitäre $S$-Matrix einführen. Sie ist definiert durch:

$$a_-(\mathfrak{k}) = S\, a_+(\mathfrak{k})\, S^{-1}; \qquad b_-(\mathfrak{K}) = S\, b_+(\mathfrak{K})\, S^{-1}. \tag{2, 16}$$

Wir bemerken noch, daß der Übergang zu verschiedenen Formen des HAMILTON-Operators durch die Einführung neuer kanonischer Operatoren, wie hier der asymptotischen Felder, auch in anderen Gebieten der Physik Anwendung findet; z. B. werden in der Festkörperphysik für zusammengesetzte Gebilde, wie das Exciton, eigene Feldoperatoren eingeführt und der HAMILTON-Operator unter deren Verwendung umgeschrieben (vgl. z. B. [12]).

Herrn Prof. H. HAKEN möchte ich für anregende Diskussionen danken.

[12] H. HAKEN u. W. SCHOTTKY, Z. Phys. Chem., N. F. **16**, 218 [1958].